Betrachtungen über Knotenflächen bei Schwingungsproblemen

Von KARL F. HERZFELD
Aus der Catholic University of America, Washington D.C.

(Z. Naturforschg. 3 a, 457—460 [1948]; eingegangen am 29. Juni 1948)

Das Vorzeichen der Amplitude oder Wellenfunktion ist auf den zwei Seiten einer Knotenfläche oder -linie verschieden. Daher muß eine solche Knotenfläche entweder geschlossen sein, oder ins Unendliche gehen, oder an einem Rande enden. Bei einer adiabatischen Änderung der Schwingung kann sich die Zahl der Knotenflächen ändern.

In Schwingungsproblemen und Lösungen der Schrödinger-Gleichung für ein Elektron in einem Atom ist es üblich, anzunehmen, daß eine bestimmte Lösung durch Knotenflächen charakterisiert ist. In dreidimensionalen Problemen nimmt man an, daß die Knotenflächen drei Systeme von orthogonalen Flächen bilden. Wenn l, m, n die Zahlen der Knotenflächen in den drei Flächensystemen für eine bestimmte Lösung (Eigenschwingung) bedeuten, dann wird angenommen, daß eine und nur eine Lösung für jedes Zahlentripel l, m, n besteht und daß, wenn zwei der Zahlen, z. B. m und n, festgehalten werden, die Schwingungszahl bzw. Energie mit der dritten Zahl, l, monoton zunimmt.

Tatsächlich sind diese Aussagen aber nur dann bewiesen, wenn die partielle Differentialgleichung separierbar ist. Bei der Separation erhält man dann drei totale Differentialgleichungen mit Randbedingungen (Eigenwertprobleme), für deren jede sich der Satz für eines der Knotenflächensysteme beweisen läßt (Oszillationstheorem)[1]. (Siehe jedoch das am Ende dieser Arbeit besprochene Beispiel.)

Tatsächlich ist jedoch die Zahl der Systeme, die Separierung der Variablen erlauben, ziemlich beschränkt[2].

Für den allgemeinen Fall sind aber nur wenige Aussagen bewiesen. Dem Autor sind nur folgende Sätze für den allgemeinen Fall bekannt:

1. Die Behauptung[3], daß sich der separierbare und nicht separierbare Fall geometrisch dadurch unterscheiden, daß im ersteren Fall die Knotenflächen eines gegebenen Systems für verschiedene Lösungen sich nicht schneiden, im letzteren jedoch sich schneiden. Zum Beispiel sind bei einer rechteckigen Membran die Knotenlinien einer Art alle gerade Linien parallel zu einer Seite; im Fall einer dreieckigen Membran schneiden sich die Knotenlinien verschiedener Lösungen.

2. Der Beweis Sommerfelds[4], daß in Schwingungsproblemen für steigende Größe der Eigenwerte die Feinheit der Unterteilung des Gebietes in Gebieten wechselnden Vorzeichens wächst. Sommerfeld führt den Beweis nur für zwei Dimensionen, doch läßt er sich ohne weiteres auf beliebige Dimensionen übertragen.

3. Der Beweis Sommerfelds[4], daß, wenn in einem zweidimensionalen Schwingungsproblem m Knotenlinien durch einen Punkt gehen, sie sich unter den Winkeln π/m schneiden. Diese Behauptung wird später auf drei Dimensionen verallgemeinert werden.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, einige weitere allgemeine Theoreme zu beweisen. Sie ist Prof. Arnold Sommerfeld in Verehrung und Dankbarkeit gewidmet.

I. Die „Einfachheit" der Knotenflächen

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung (Wellengleichung) im n-dimensionalen Raum

$$\Delta_n \Phi + F \Phi = 0 , \tag{1}$$

wo F eine (abgesehen von darin enthaltenen Eigenwerten) gegebene Funktion der Koordinaten ist,

[1] S. z. B. Frank-Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2. Aufl., S. 354 ff., Braunschweig 1930.

[2] P. Staeckel, Math. Ann. **42**, 537 [1893]; H. P. Robertson, Math. Ann. **98**, 749 [1928[; L. P. Eisenhart, Ann. Math. **34**, 284 [1934]; Physic. Rev. **45**, 427 [1934], **74**, 87 [1948].

[3] K. F. Herzfeld, Z. Physik **68**, 325 [1931].

[4] A. Sommerfeld, Partielle Differentialgleichungen der Physik. Akadem. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1947, S. 176, 177.

und nehmen an, daß irgendwelche Grenzbedingungen vorliegen, die das Problem zu einem Eigenwertproblem machen.

Wir nehmen an, daß die Lösung Φ wenigstens eine $[(n-1)$-dimensionale$]$ Knotenfläche hat. Wir führen dann orthogonale krummlinige Koordinaten ein, so daß U normal auf der Knotenfläche steht, während $u_1 \ldots\ldots u_{n-1}$ in der Knotenfläche liegen[5]. (1) nimmt dann die Form an:

$$\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial U} H \frac{\partial \Phi}{\partial U} + \frac{1}{G}\sum_{1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial u_s} h_s \frac{\partial \Phi}{\partial u_s} + F\Phi = 0\,. \tag{2}$$

Wir wollen (2) umschreiben in die Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial U^2} + \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial U}\frac{\partial \Phi}{\partial U} + \sum \left(\frac{h_s}{H}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_s^2} + \frac{1}{H}\frac{\partial h_s}{\partial u_s}\frac{\partial \Phi}{\partial u_s}\right) = -g\,\Phi \tag{3}$$

mit der Abkürzung

$$g = \frac{G}{H} F. \tag{3'}$$

Wir wollen Singularitäten von H, $1/H$, $h_1 \ldots h_{n-1}$ und g oder irgendeines ihrer Differentialquotienten kurzweg als „singuläre Stellen" bezeichnen und annehmen, daß diese auf der Knotenfläche nicht überall dicht liegen.

Wir wollen dann zeigen, daß die Annahme, auf einem endlichen Teil der Knotenfläche $U = U_0$ sei auch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U} = 0\,, \tag{4}$$

dazu führt, daß Φ in einem endlichen Bereich Null ist. Wir machen zuerst Annahme (4). Wir zeigen, daß, falls

$$\frac{\partial^q \Phi}{\partial U^q} = 0\,; \quad \frac{\partial^{q-1} \Phi}{\partial U^{q-1}} = 0\,; \;\ldots\,; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial U} = 0\,; \quad \Phi = 0$$

ist, auch

$$\frac{\partial^{q+1} \Phi}{\partial U^{q+1}} = 0 \tag{5}$$

sein muß, außer an singulären Stellen.

Da die Fläche $U = U_0$ eine Knotenfläche ist, folgt, daß alle Differentialkoeffizienten nach u_s auf ihr Null sein müssen, außer an singulären Stellen.

Man differenziere nun (3) $q-1$-mal nach U. Dann wird

$$\frac{\partial^{q+1}}{\partial U^{q+1}}\Phi + \sum_{p=0}^{q-1}\binom{q-1}{p}\frac{\partial^{p+1}}{\partial U^{p+1}}\Phi\,\frac{\partial^{q-1-p}}{\partial U^{q-1-p}}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial U}\right) + \sum_s\sum_{p=0}^{q-1}\binom{q-1}{p}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial u_s^2}\frac{\partial^p \Phi}{\partial U^p}\right)\frac{\partial^{q-1-p}}{\partial U^{q-1-p}}\left(\frac{h_s}{H}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial}{\partial u_s}\frac{\partial^p \Phi}{\partial U^p}\right)\frac{\partial^{q-1-p}}{\partial U^{q-1-p}}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial h_s}{\partial u_s}\right)\right] = -\sum_{p=0}^{q-1}\binom{q-1}{p}\frac{\partial^p \Phi}{\partial U^p}\frac{\partial^{q-1-p} g}{\partial U^{q-1-p}}\,. \tag{6}$$

Aus (3) folgt, daß unter der Annahme (4) auf der Knotenfläche $U = U_0$ auch $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial U^2} = 0$ ist, und aus (6) folgt dann, daß auch alle höheren Differentialquotienten (5) Null sind, außer an singulären Stellen.

Da dies für die ganze Oberfläche gilt, folgt, daß auch die gemischten Differentialquotienten verschwinden,

$$\frac{\partial^{q+m} \Phi}{\partial U^q\, \partial u_s^m} = 0\,,$$

so daß in diesem Fall Φ in einem ausgedehnten Bereich um die Knotenfläche verschwindet. Da wir dies als ausgeschlossen ansehen, folgt, daß der erste Differentialquotient senkrecht zur Knotenfläche nicht längs eines endlichen Teiles der Knotenfläche[6] verschwinden kann, so daß die *Funktion an der Knotenfläche Zeichen wechselt* und die Knotenfläche den Charakter einer einfachen Wurzel hat.

Aus diesem Resultat folgt sofort, daß eine Knotenfläche nicht innerhalb des betrachteten Gebietes endigen kann. Es bestehen nur zwei Möglichkeiten:

a) Die Knotenfläche ist geschlossen.

[5] Dies braucht nur in der unmittelbaren Umgebung des betrachteten Punktes zu gelten.

[6] Wohl aber kann $\partial\Phi/\partial U$ an $(n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten auf der Knotenfläche verschwinden, wo nämlich eine andere Knotenfläche die betrachtete schneidet; s. II.

b) Die Knotenfläche geht ins Unendliche, oder, falls eine endliche Begrenzung mit der Grenzbedingung $\Phi = 0$ gegeben ist, die Knotenfläche endet auf dem Rand.

Es folgt auch (siehe II), daß sich nicht etwa in 3 Dimensionen eine ungerade Zahl von Knotenebenen in einer Geraden treffen können (statt sich zu schneiden).

II. Der Fall eines begrenzten Gebietes für zwei oder drei Dimensionen

Falls das Gebiet von einer Begrenzung umschlossen ist, auf welcher $\Phi = 0$ vorgeschrieben ist, gilt der in I gegebene Beweis auch für diesen Rand, d. h. der Differentialquotient von Φ senkrecht zum Rand verschwindet nicht, außer auf Mannifaltigkeiten der Ordnung $n-2$, wo nämlich Knotenflächen den Rand treffen[7].

Die folgenden Überlegungen verallgemeinern Überlegungen von Sommerfeld[4]. Sie gelten bei beliebigem F, solange nicht eine Knotenlinie durch einen singulären Punkt von F geht. In einem regulären Punkt A von F kann man dann F für die Umgebung von A durch den konstanten Wert $F(A)$ ersetzen.

a) Für zwei Dimensionen hat Sommerfeld gezeigt, daß sich m Knotenlinien in einem Punkt unter gleichen Winkeln π/m schneiden müssen. In Analogie folgt sofort, daß, falls n Knotenlinien in einem „glatten" Punkt des Randes (für den F regulär ist) einlaufen, sie untereinander bzw. mit dem Rand die gleichen Winkel einschließen. Es ist also unmöglich, daß eine Knotenlinie den Rand berührt.

b) Für drei Dimensionen sieht man in Analogie zu Sommerfelds Schlußfolgerung, daß die Lösung in der Umgebung des betrachteten Punktes von der Form

$$\Phi = r^n f(r)\, P_n^m \sin m\,(\varphi - \varphi_0)$$

ist, wo $f(0)$ nicht unendlich ist.

Die folgenden Knotenflächen können daher die Begrenzungsfläche schneiden[7a]:

1. $(m-1)$ Ebenen, die eine gemeinsame, in der Begrenzung liegende Schnittlinie haben und miteinander und der Wand den Winkel π/m bilden. Außerdem $n-m$ halbe Doppelkegel, mit der obengenannten Schnittlinie als Achse. Falls dabei $n-m$ ungerade ist, ist unter diesen Doppelkegeln eine Ebene, die senkrecht auf der Wand und der obengenannten Schnittlinie steht; ist im besonderen $n = 3$, $m = 2$, dann hat man als Knotenflächen nur zwei Ebenen, senkrecht aufeinander und auf der Wand.

2. Es ist auch möglich, die Achse der Kugelfunktion senkrecht auf die Wand zu legen; dann muß $n-m$ ungerade sein, und die Knotenflächen sind dann $(n-m-1)/2$ Kegel, mit der Achse senkrecht zur Wand und der Spitze in der Wand, und m Ebenen senkrecht zur Wand, die einander in der Kegelachse unter dem Winkel π/m schneiden.

Die vorhergehenden Aussagen haben vorausgesetzt, daß wir eine nicht singuläre Stelle der Begrenzung betrachten.

III. Adiabatische Änderung

Nach Pockels[8] hat F. Klein das „Kontinuitätsprinzip" ausgesprochen, nach welchem die Lösung und damit auch die Knotenlinien sich kontinuierlich ändern, wenn man die Berandung oder F kontinuierlich ändert.

Wir fragen hier, inwieweit eine solche „adiabatische" Änderung die Zahl der Knotenlinien, oder, anders gesagt, die Zahl der verschiedenen Gebiete verschiedenen Vorzeichens beeinflußt. Bliebe diese Zahl nämlich ungeändert, so könnte man in nichtdegenerierten Fällen die Schwingungsformen zweier ganz verschiedener Berandungen als ineinander übergehend einander zuordnen, ohne die kontinuierliche Überführung tatsächlich zu verfolgen.

Aus I folgt sofort, daß bei einer solchen adiabatischen Änderung nie zwei Knotenlinien oder -flächen längs eines endlichen Bereiches miteinander verschmelzen können, denn sonst hätte Φ auf den beiden Seiten der durch Verschmelzung entstandenen Knotenfläche gleiches Zeichen.

Um zu sehen, was wirklich geschehen kann, mögen einzelne Fälle betrachtet werden.

[7] Hierauf hat mich Prof. F. Bopp in einer Diskussion aufmerksam gemacht.

[7a] Anm. bei der Korr. Die im Text gemachten Feststellungen sind zu speziell, da man über m mit beliebigen Koeffizienten summieren kann. Durch Hauptachsentransformation sieht man, daß für $n = 1$ nichts zu ändern ist. Für $n = 2$ kann der Doppelkegel elliptischen Querschnitt haben. Es ist mir unbekannt, wie die allgemeinsten Knotenflächen für $n > 2$ aussehen.

[8] F. Pockels, Die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. B. G. Teubner, Leipzig 1891, S. 95.

Erstens ist es möglich, daß, wie unter II besprochen, in der Ebene sich m Gerade unter den Winkeln π/m schneiden, und daß bei einer adiabatischen Änderung sich m Kurven aus diesem Schnittpunkt loslösen. Als Beispiel betrachte man den umgekehrten Prozeß; man habe eine elliptische Membran, die so schwinge, daß ihre Knotenlinien m konzentrische Hyperbeläste sind. Verkleinert man den Abstand der Brennpunkte, so nimmt die Krümmung der Hyperbeln am Scheitel mehr und mehr zu, und die Scheitel nähern sich einander[9].

Ist man am Kreis angelangt, so sind aus den m Hyperbelästen m sich schneidende Gerade geworden; die Zuordnung der Hälften der Hyperbeläste hat sich geändert, nicht aber die Zahl der Knotenlinien; dagegen ist die Zahl der getrennten Gebiete um 1 gewachsen, falls m gerade ist. Ähnlich ist die Lage im Raum, wo nicht nur m sich schneidende Ebenen als m hyperbolische Zylinder auseinandergehen können, sondern wo auch Doppelkegel als Rotationshyperboloide sich trennen können, ohne die Zahl der Knotenflächen zu ändern.

Dagegen bringen andere adiabatische Prozesse Änderungen in der Zahl der Knotenlinien hervor, besonders Prozesse, die am Rande vor sich gehen.

[9] Formelmäßig wird das so: Man schreibe

$$x = c \cosh \eta \cos \xi \; ; \; y = c \sinh \eta \sin \xi ,$$

wo $2c$ der Abstand der Brennpunkte ist. $\xi = \xi_0$, $2\pi - \xi_0$ stellt einen Hyperbelast dar; die Gleichung für ein Paar solcher Äste ist:

$$\frac{x^2}{\cos^2 \xi_0} - \frac{y^2}{\sin^2 \xi_0} = c^2 .$$

Beim Übergang zum Kreis, $c = 0$, wird daraus ein Geradenpaar:

$$\pm \frac{x}{\cos \xi_0} = \frac{y}{\sin \xi_0} .$$

Dabei wird in der Grenze $c = 0$:

$$c \cosh \eta = c \sinh \eta = \frac{c}{2} e^{\eta} = r .$$

Der Krümmungsradius ϱ berechnet sich zu:

$$\varrho = - c \frac{\cos^2 \xi}{\sin \xi} (1 + 2 \sinh^2 \eta)^{3/2} .$$

Für kleine c wird das $\varrho = -2\sqrt{2} \, \frac{\cos^2 \xi}{\sin \xi} \frac{r^3}{c}$, wo r der Abstand vom Nullpunkt ist.

Man betrachte z. B. eine elliptische Membran, die so schwingt, daß sie die kurze Achse ($2b$) und eine konzentrische Ellipse als Knoten hat. Diese Membran wird nun längs der kurzen Achse entzwei geschnitten, so daß man als Membran die Hälfte einer Ellipse hat, mit einer halben Ellipse als Knotenlinie. Diese halbe elliptische Fläche werde nun adiabatisch in ein Rechteck verwandelt, mit $2b$ als kurzer Seite. Die Knotenlinie muß dann offenbar aus *einer* halben Ellipse in *zwei* Gerade, senkrecht zur kurzen Seite (der früheren kurzen Ellipsenachse), übergehen, deren Abstand voneinander $2b/3$ ist. Das kann nur so geschehen, daß der Scheitel der halbelliptischen Knotenlinie immer größere Krümmung erhält und sich dem (noch gerundeten) Rande nähert. Für eine bestimmte Randform geht sie in zwei Geradenstücke über, die sich am Rande unter 60° treffen (der Prozeß ähnelt dem oben beschriebenen der Überkreuzung). Bei weiterer Randdeformation entsteht an den Enden der beiden Äste eine unendliche Krümmung (mit den Krümmungsmittelpunkten zwischen den Knotenästen und dem Rand, so daß die beiden Äste senkrecht zum Rande sind, sobald sie auseinanderrücken). Bei weiterer Annäherung an das Rechteck wird die Krümmung kleiner, und die oberen Enden der jetzt getrennten Knotenlinien rücken weiter auseinander.

Ähnlich ist es, wenn man von einem gestreckten Rotationsellipsoid zu einem Zylinder übergeht. Knotenflächen, die Rotationsellipsoide waren, nehmen am Scheitel immer größere Krümmung an, berühren den Rand als Kegel, die sich dann zu Zylindern erweitern.

Ebenso kann es vorkommen, daß eine Abschnürung einer geschlossenen Kurve oder Fläche eintritt unter Vermehrung der Knotenzahl. Der Prozeß ist wieder ähnlich dem für Überschneidungen geschilderten.

Man kann also *nicht* sagen, daß im allgemeinen bei adiabatischen Prozessen die Zahl der Knotenflächen oder der getrennten Gebiete erhalten bleibt. Noch anders illustriert, sieht man, daß es *drei* verschiedene Schwingungsformen einer elliptischen Membran gibt, die geometrisch nur eine Knotenlinie haben: diese kann nämlich die kurze Achse, die lange Achse oder eine Ellipse sein.